Formelsammlung

für die standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung (SRDP)

Angewandte Mathematik (BHS)
Berufsreifeprüfung Mathematik

Diese Formelsammlung ist ab dem Haupttermin 2017 (Mai 2017) als Hilfsmittel für die SRDP in Angewandter Mathematik und die Berufsreifeprüfung Mathematik zugelassen.

Ab dem Haupttermin 2020 (Mai 2020) ist diese Formelsammlung die **einzig** zugelassene Formelsammlung für die SRDP in Angewandter Mathematik und die Berufsreifeprüfung Mathematik.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Stand: 1. September 2018

Index

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

$\in$	ist Element von ...
$\notin$	ist nicht Element von ...
$\cap$	Durchschnitt(smenge)
$\cup$	Vereinigung(smenge)
$\subset$	echte Teilmenge
$\subseteq$	Teilmenge
$\setminus$	Differenzmenge („ohne“)
$\{\ \}$	leere Menge

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	positive reelle Zahlen mit Null

2 Vorsilben

Tera-	T	10^{12}	Dezi-	d	10^{-1}
Giga-	G	10^{9}	Zenti-	c	10^{-2}
Mega-	M	10^{6}	Milli-	m	10^{-3}
Kilo-	k	10^{3}	Mikro-	µ	10^{-6}
Hekto-	h	10^{2}	Nano-	n	10^{-9}
Deka-	da	10^{1}	Pico-	p	10^{-12}

3 Potenzen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad a^1 = a$$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

$a, b \in \mathbb{R}_0^+; n, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $n \geq 2$

$$a = \sqrt[n]{b} \iff a^n = b \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \text{ mit } a > 0$$

23 Kosten- und Preistheorie

x ... produzierte, angebotene, nachgefragte bzw. verkaufte Menge ($x \geq 0$)

Kostenfunktion K	$K(x)$
Fixkosten F	$K(0)$
variable Kostenfunktion K_v	$K_v(x) = K(x) - F$
Grenzkostenfunktion K'	$K'(x)$
Stückkostenfunktion (Durchschnittskostenfunktion) $\overline{K}$	$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$
variable Stückkostenfunktion (variable Durchschnittskostenfunktion) $\overline{K_v}$	$\overline{K_v}(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Betriebsoptimum x_{opt}	$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$ (Minimumstelle von $\overline{K}$)
langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis)	$\overline{K}(x_{opt})$
Betriebsminimum x_{min}	$\overline{K_v}'(x_{min}) = 0$ (Minimumstelle von $\overline{K_v}$)
kurzfristige Preisuntergrenze	$\overline{K_v}(x_{min})$
Kostenkehre	$K''(x) = 0$
progressiver Kostenverlauf	$K''(x) > 0$
degressiver Kostenverlauf	$K''(x) < 0$

Preis p	
Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion) p_N	$p_N(x)$
Preisfunktion des Angebots p_A	$p_A(x)$
Marktgleichgewicht	$p_A(x) = p_N(x)$
Höchstpreis	$p_N(0)$
Sättigungsmenge	$p_N(x) = 0$

Erlösfunktion (Umsatzfunktion) E	$E(x) = p \cdot x$ bzw. $E(x) = p_N(x) \cdot x$
Grenzerlösfunktion E'	$E'(x)$
Gewinnfunktion G	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion G'	$G'(x)$
untere Gewinngrenze (Break-even-Point, Gewinnschwelle) x_u obere Gewinngrenze x_o	$G(x_u) = G(x_o) = 0$ mit $x_u \leq x_o$
Gewinnbereich (Gewinnzone)	$[x_u; x_o]$
Cournot'scher Punkt C	$C = (x_C \mid p_N(x_C))$ mit $G'(x_C) = 0$

24 Bewegungsvorgänge

t ... Zeit

Weg-Zeit-Funktion s	$s(t)$
Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v	$v(t) = s'(t)$
Beschleunigung-Zeit-Funktion a	$a(t) = v'(t) = s''(t)$

Rentenrechnung

R ... Ratenhöhe
n ... Anzahl der Raten
i ... Zinssatz
$q = 1 + i$ ... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert E	$E_{nach} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{vor} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert B	$B_{nach} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{vor} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

Tilgungsplan

Zeit	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				K_0
1	$K_0 \cdot i$	T_1	$A_1 = K_0 \cdot i + T_1$	$K_1 = K_0 - T_1$
...	...	...	...	...

22 Investitionsrechnung

E_t ... Einnahmen im Jahr t
A_t ... Ausgaben im Jahr t
A_0 ... Anschaffungskosten
R_t ... Rückflüsse im Jahr t
i ... kalkulatorischer Zinssatz (Jahreszinssatz)
n ... Nutzungsdauer in Jahren
i_w ... Wiederveranlagungszinssatz (Jahreszinssatz)
E ... Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse

$R_t = E_t - A_t$

Kapitalwert C_0

$$C_0 = \left[\frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n}\right] - A_0$$

Interner Zinssatz i_{intern}

$$\left[\frac{R_1}{(1+i_{intern})} + \frac{R_2}{(1+i_{intern})^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i_{intern})^n}\right] - A_0 = 0$$

Modifizierter interner Zinssatz i_{mod}

$$A_0 \cdot (1 + i_{mod})^n = E \text{ mit } E = R_1 \cdot (1 + i_w)^{n-1} + R_2 \cdot (1 + i_w)^{n-2} + \ldots + R_{n-1} \cdot (1 + i_w) + R_n$$

Rechenregeln

$a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}; r, s \in \mathbb{Z}$
bzw. $a, b \in \mathbb{R}^+; r, s \in \mathbb{Q}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

$a, b \in \mathbb{R}_0^+; m, n, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $m, n \geq 2$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Binomische Formeln

$a, b \in \mathbb{R}$

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$
$(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$

4 Logarithmen

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1; x, r \in \mathbb{R}$

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$

natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e): $\ln(b) = \log_e(b)$
dekadischer Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10): $\lg(b) = \log_{10}(b)$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$ $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

$\log_a(a^x) = x$ $\log_a(a) = 1$ $\log_a(1) = 0$ $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$ $a^{\log_a(b)} = b$

5 Quadratische Gleichungen

$p, q \in \mathbb{R}$

$x^2 + p \cdot x + q = 0$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn gilt:
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

Zerlegung in Linearfaktoren:
$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

6 Ebene Figuren

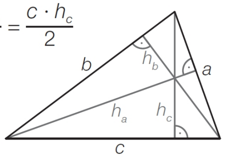
A ... Flächeninhalt
u ... Umfang

Dreieck

$u = a + b + c$

Allgemeines Dreieck

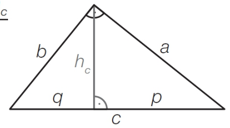
$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$



Rechtwinkeliges Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a, b

$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$h_c^2 = p \cdot q$
$a^2 = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$



Heron'sche Flächenformel

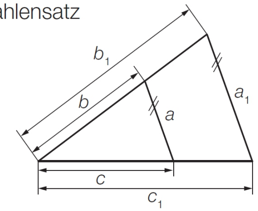
$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$ mit $s = \frac{a + b + c}{2}$

Satz des Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

Ähnlichkeit und Strahlensatz

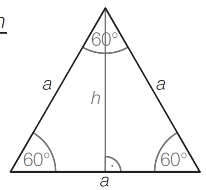
$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$



Gleichseitiges Dreieck

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot h}{2}$

$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

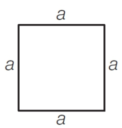


Viereck

Quadrat

$A = a^2$

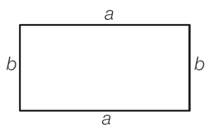
$u = 4 \cdot a$



Rechteck

$A = a \cdot b$

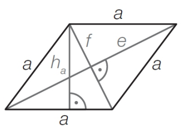
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



Raute (Rhombus)

$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$

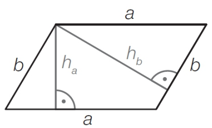
$u = 4 \cdot a$



Parallelogramm

$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



20 Lineare Regression

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ ... Wertepaare
$\bar{x}, \bar{y}$ ... arithmetisches Mittel der x_i bzw. y_i

Lineare Regressionsfunktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$d = \bar{y} - k \cdot \bar{x}$

Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

21 Finanzmathematik

Zinsen und Zinseszinsen

K_0 ... Anfangskapital
K_n ... Endkapital nach n Jahren
i ... Jahreszinssatz

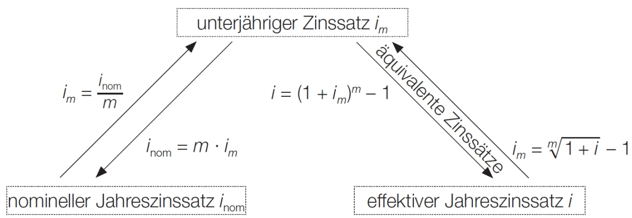
einfache Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$
Zinseszinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Unterjährige Verzinsung

m ... Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

Für Zinssätze gelten folgende Abkürzungen:
p.a. ... pro Jahr
p.s. ... pro Semester
p.q. ... pro Quartal
p.m. ... pro Monat

$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$



Normalverteilung

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$
f ... Dichtefunktion
F ... Verteilungsfunktion
φ ... Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
ϕ ... Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Normalverteilung $N(\mu; \sigma^2)$: Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ bzw. der Varianz σ^2

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x$$

Wahrscheinlichkeiten für σ-Umgebungen
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$
$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}954$
$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0{,}997$

Standardnormalverteilung $N(0; 1)$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$
$P(-z \leq Z \leq z) = 2 \cdot \phi(z) - 1$

$P(-z \leq Z \leq z)$	$= 90\ \%$	$= 95\ \%$	$= 99\ \%$
z	$\approx 1{,}645$	$\approx 1{,}960$	$\approx 2{,}576$

Zufallsstreubereich und Konfidenzintervall

$\mu, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ und $0 < \alpha < 1$
$\bar{x}$ ... Stichprobenmittelwert
s_{n-1} ... Standardabweichung einer Stichprobe
n ... Stichprobenumfang
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ... $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der Standardnormalverteilung
$t_{f;1-\frac{\alpha}{2}}$ ... $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der t-Verteilung mit f Freiheitsgraden

Zweiseitiger $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich für einen Einzelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right]$$

Zweiseitiger $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert normalverteilter Werte

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

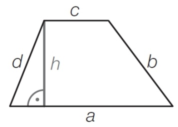
Zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

σ bekannt: $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

σ unbekannt: $\left[\bar{x} - t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$ mit $f = n - 1$

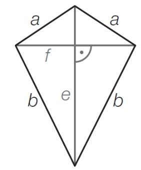
Trapez

$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$
$u = a + b + c + d$



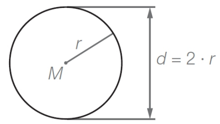
Deltoid

$A = \frac{e \cdot f}{2}$
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



Kreis

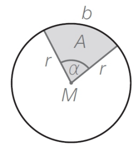
$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$
$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$



Kreisbogen und Kreissektor

α im Gradmaß (°)

$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}$
$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{b \cdot r}{2}$

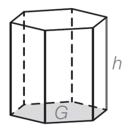


7 Körper

V ... Volumen
O ... Inhalt der Oberfläche
G ... Inhalt der Grundfläche
M ... Inhalt der Mantelfläche
u_G ... Umfang der Grundfläche

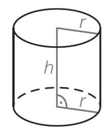
Prisma

$V = G \cdot h$
$M = u_G \cdot h$
$O = 2 \cdot G + M$



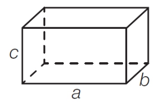
Drehzylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



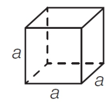
Quader

$V = a \cdot b \cdot c$
$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$



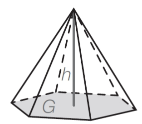
Würfel

$V = a^3$
$O = 6 \cdot a^2$



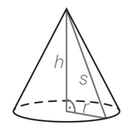
Pyramide

$V = \frac{G \cdot h}{3}$
$O = G + M$



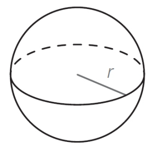
Drehkegel

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$M = \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$s = \sqrt{h^2 + r^2}$



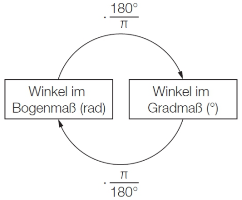
Kugel

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



8 Trigonometrie

Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß

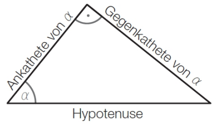


Trigonometrie im rechtwinkeligen Dreieck

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

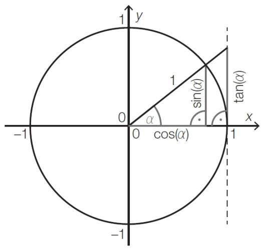
Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$



Trigonometrie im Einheitskreis

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

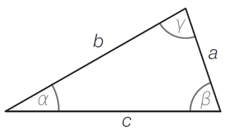
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ für $\cos(\alpha) \neq 0$



Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



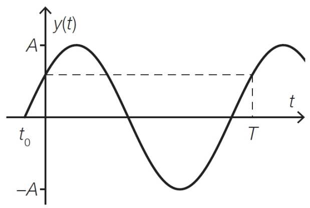
Trigonometrische Flächenformel:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$

Allgemeine Sinusfunktion

A ... Amplitude	T ... Schwingungsdauer (Periodendauer)
ω ... Kreisfrequenz	f ... Frequenz
φ ... Nullphasenwinkel	

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$
$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$



19 Wahrscheinlichkeit

$n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$; $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$
A, B ... Ereignisse
$\overline{A}$ bzw. $\neg A$ ... Gegenereignis von A
$A \cap B$ bzw. $A \wedge B$ ... A und B (sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B treten ein)
$A \cup B$ bzw. $A \vee B$ ... A oder B (mindestens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein)
$P(A)$ ... Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A
$P(A|B)$ ... Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass B eingetreten ist (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Fakultät (Faktorielle)

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ $\quad 0! = 1 \quad 1! = 1$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Versuch

$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$

Elementare Regeln

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ... wenn A und B (stochastisch) unabhängig voneinander sind
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ... wenn A und B unvereinbar sind

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Satz von Bayes

$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}$

Erwartungswert μ einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Varianz σ^2 einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$

Standardabweichung σ

$\sigma = \sqrt{V(X)}$

Binomialverteilung

$n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$; $k \in \mathbb{N}$; $p \in \mathbb{R}$ mit $k \leq n$ und $0 \leq p \leq 1$

Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$E(X) = \mu = n \cdot p$
$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

18 Statistik

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ... eine Liste von n reellen Zahlen
Dabei treten k verschiedene Werte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ auf.
H_i ... absolute Häufigkeit von x_i mit $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = n$

Relative Häufigkeit von x_i

$$h_i = \frac{H_i}{n}$$

Lagemaße

Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \ldots + x_k \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot H_i$$

Geometrisches Mittel

$$\overline{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \quad \text{mit } x_i > 0$$

Median bei metrischen Daten

$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ ... geordnete Liste mit n Werten

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{... für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & \text{... für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Quartile

q_1: Mindestens 25 % der Werte sind kleiner oder gleich q_1, zugleich sind mindestens 75 % der Werte größer oder gleich q_1.
$q_2 = \tilde{x}$
q_3: Mindestens 75 % der Werte sind kleiner oder gleich q_3, zugleich sind mindestens 25 % der Werte größer oder gleich q_3.

Streuungsmaße

s^2 ... (empirische) Varianz einer Datenliste
s ... (empirische) Standardabweichung einer Datenliste

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \qquad s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot H_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \qquad s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot H_i}$$

Wenn aus einer Stichprobe vom Umfang n die Varianz einer Grundgesamtheit geschätzt werden soll

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \qquad s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot H_i$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \qquad s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot H_i}$$

Spannweite

$x_{max} - x_{min}$

(Inter)quartilsabstand

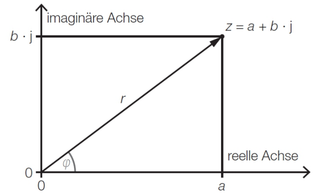
$q_3 - q_1$

9 Komplexe Zahlen

j bzw. i ... imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$ bzw. $i^2 = -1$
a ... Realteil, $a \in \mathbb{R}$ — r ... Betrag, $r \in \mathbb{R}_0^+$
b ... Imaginärteil, $b \in \mathbb{R}$ — φ ... Argument, $\varphi \in \mathbb{R}$

Komponentenform

$$z = a + b \cdot j$$



Polarformen

$$z = r \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{j \cdot \varphi} = (r; \varphi) = r \angle \varphi$$

Umrechnungen

$$a = r \cdot \cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$b = r \cdot \sin(\varphi) \qquad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

10 Vektoren

P, Q ... Punkte

Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Pfeil von P nach Q:
$P = (p_1|p_2)$, $Q = (q_1|q_2)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^2$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Normalvektoren zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ und } |\vec{a}| \ne 0$$

Vektoren in $\mathbb{R}^n$

Pfeil von P nach Q:
$P = (p_1|p_2|\ldots|p_n)$, $Q = (q_1|q_2|\ldots|q_n)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^n$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit $|\vec{a}| \neq 0$; $|\vec{b}| \neq 0$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \quad \text{mit} \quad |\vec{a}| \neq 0$$

Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

11 Geraden

g ... Gerade	$\vec{g}$ ... ein Richtungsvektor der Geraden g $\vec{n}$ ... ein Normalvektor der Geraden g X, P ... Punkte auf der Geraden g k ... Steigung der Geraden g α ... Steigungswinkel der Geraden g $a, b, c, k, d \in \mathbb{R}$

Parameterdarstellung einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$g: X = P + t \cdot \vec{g}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Gleichung einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$

explizite Form der Geradengleichung: $g: y = k \cdot x + d$ dabei gilt $k = \tan(\alpha)$

allgemeine Geradengleichung: $g: a \cdot x + b \cdot y = c$

Normalvektordarstellung: $g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ dabei gilt $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Integrationsmethode – lineare Substitution

$$\int f(a \cdot x + b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

Volumen von Rotationskörpern

Rotation des Graphen einer Funktion f mit $y = f(x)$ um eine Koordinatenachse

Rotation um die x-Achse ($a \leq x \leq b$)

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$$

Rotation um die y-Achse ($c \leq y \leq d$)

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\,\mathrm{d}y$$

Bogenlänge s des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Linearer Mittelwert m einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

$y' = f(x) \cdot g(y)$ bzw. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$ mit $y = y(x)$

Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y ... allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung y_h ... allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + a \cdot y = 0$ y_p ... partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung s ... Störfunktion

$y' + a \cdot y = s(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$

$y = y_h + y_p$

16 Ableitung und Integral

f, g, h ... auf ganz $\mathbb{R}$ oder in einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen
f', g', h' ... Ableitungsfunktionen
F ... Stammfunktion von f
$C, k, q \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

Unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ mit $F' = f$

Bestimmtes Integral

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Funktion f	Ableitungsfunktion f'	Stammfunktion F
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

12 Matrizen

$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$; $i, j, m, n, p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; $k \in \mathbb{R}$

Addition/Subtraktion von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl k

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

$\boldsymbol{A}$ ... $m \times p$-Matrix $\quad$ $\boldsymbol{B}$ ... $p \times n$-Matrix $\quad$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ... $m \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise (n Gleichungen in n Variablen)

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$
$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$
$\ldots$
$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Wenn die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert, dann gilt: $\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \vec{b}$

Produktionsprozesse

$\boldsymbol{A}$ ... quadratische Verflechtungsmatrix $\quad$ $\boldsymbol{E}$ ... Einheitsmatrix
$\vec{x}$ ... Produktionsvektor $\quad$ $\vec{n}$ ... Nachfragevektor

$\vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{n} \qquad \vec{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \vec{n} \qquad \vec{n} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x}$

13 Folgen und Reihen

Arithmetische Folge

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$d = a_{n+1} - a_n$

Rekursives Bildungsgesetz

$a_{n+1} = a_n + d$

Explizites Bildungsgesetz

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Geometrische Folge

$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Rekursives Bildungsgesetz

$b_{n+1} = b_n \cdot q$

Explizites Bildungsgesetz

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Endliche arithmetische Reihe

Summe der ersten n Glieder

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$

Endliche geometrische Reihe

Summe der ersten n Glieder

$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n$

$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ mit $q \neq 1$

Unendliche geometrische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$

$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{b_1}{1-q}$ für $|q| < 1$

14 Änderungsmaße

Für eine auf einem Intervall $[a; b]$ definierte reelle Funktion f gilt:

Absolute Änderung von f in $[a; b]$

$f(b) - f(a)$

Relative (prozentuelle) Änderung von f in $[a; b]$

$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ mit $f(a) \neq 0$

Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) von f in $[a; b]$ bzw. in $[x; x + \Delta x]$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ bzw. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ mit $b \neq a$ bzw. $\Delta x \neq 0$

Differenzialquotient (lokale bzw. „momentane" Änderungsrate) von f an der Stelle x

$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ bzw. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

15 Wachstums- und Abnahmeprozesse

t ... Zeit
$N(t)$ ... Bestand zur Zeit t
$N_0 = N(0)$ ... Bestand zur Zeit $t = 0$

Linear

$k \in \mathbb{R}^+$

lineares Wachstum	$N(t) = N_0 + k \cdot t$	
lineare Abnahme	$N(t) = N_0 - k \cdot t$	

Exponentiell

$a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$ und $N_0 > 0$
a ... Änderungsfaktor

exponentielles Wachstum	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $a > 1$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
exponentielle Abnahme	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $0 < a < 1$	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Beschränkt

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$
S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

beschränktes Wachstum (Sättigungsfunktion)	$N(t) = S - b \cdot a^t$ mit $b = S - N_0$	$N(t) = S - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = S - N_0$
beschränkte Abnahme (Abklingfunktion)	$N(t) = S + b \cdot a^t$ mit $b = \lvert S - N_0 \rvert$	$N(t) = S + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = \lvert S - N_0 \rvert$

Logistisch

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$ und $N_0 > 0$
S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

logistisches Wachstum	$N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot a^t}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$	$N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$