

Formelsammlung

für die standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung (SRDP)

Angewandte Mathematik (BHS) Berufsmreifeprüfung Mathematik

Diese Formelsammlung ist ab dem Haupttermin 2017 (Mai 2017) als Hilfsmittel für die SRDP in Angewandter Mathematik und die Berufsmreifeprüfung Mathematik zugelassen.

Ab dem Haupttermin 2020 (Mai 2020) ist diese Formelsammlung die **einzig** zugelassene Formelsammlung für die SRDP in Angewandter Mathematik und die Berufsmreifeprüfung Mathematik.

M

Mantelfläche 6
 Marktgleichgewicht 20
 Matrix 10
 Median 15
 Mega- 3
 Mengen 3
 Mikro- 3
 Milli- 3
 Mittelwert 15
 mittlere Änderungsrate 11
 modifizierter interner Zinssatz 19
 momentane Änderungsrate 11

N

Nachfragevektor 10
 nachschüssig 19
 Nano- 3
 natürliche Zahlen 3
 natürlicher Logarithmus 4
 nomineller Jahreszinssatz 18
 Normalvektor 8
 Normalverteilung 17
 Nullphasenwinkel 7
 Nutzungsdauer 19

O

Oberfläche 6

P

Parallelogramm 5
 Parameterdarstellung 9
 Periodendauer 7
 Pico- 3
 Polarformen 8
 Potenzen 3
 Preis 20
 Preis-Absatz-Funktion 20
 Preisfunktion der Nachfrage 20
 Preisfunktion des Angebots 20
 Prisma 6
 Produktionsprozesse 10
 Produktionsvektor 10
 Produktregel 13
 progressiver Kostenverlauf 20
 prozentuelle Änderung 11
 Pyramide 6

Q

Quader 6
 Quadrat 5
 quadratische Gleichungen 4
 Quantil 17
 Quartil 15
 Quartilsabstand 15
 Quotientenregel 13

R

Rate 19
 Ratenhöhe 19
 rationale Exponenten 3
 rationale Zahlen 3
 Raute 5
 Realteil 8
 Rechteck 5
 rechtwinkeliges Dreieck 5, 7
 reelle Zahlen 3
 Reihen 11
 rekursives Bildungsgesetz 11
 relative Änderung 11
 relative Häufigkeit 15
 Rentenrechnung 19
 Restschuld 19
 Rhombus 5
 Richtungsvektor 9
 Rotationskörper 14
 Rückflüsse 19

S

Sättigungsfunktion 12
 Sättigungsmenge 20
 Sättigungswert 12
 Satz des Pythagoras 5
 Satz von Bayes 16
 Satz von Vieta 4
 Schwingungsdauer 7
 Sigma-Umgebungen 17
 Sinus 7
 Sinusfunktion 7
 Sinussatz 7
 Skalarprodukt 8
 Spannweite 15
 Stammfunktion 13
 Standardabweichung 15, 16, 17
 Standardnormalverteilung 17
 Statistik 15
 Steigung 9
 Steigungswinkel 9
 Stichprobe 15, 17
 Stichprobenmittelwert 17
 Stichprobenumfang 17
 Störfunktion 14
 Strahlensatz 5
 Streuungsmaße 15
 Stückkostenfunktion 20
 Summenregel 13

T

Tangens 7
 Teilmenge 3
 Tera- 3
 Tilgungsanteil 19
 Tilgungsplan 19

transponierte Matrix 10
 Trapez 6
 trennbare Variablen 14
 Trigonometrie 7
 trigonometrische Flächenformel 7
 t -Verteilung 17

U

Umfang 5, 6
 Umsatzfunktion 20
 unbestimmtes Integral 13
 unendliche geometrische Reihe 11
 unterjährige Verzinsung 18

V

variable Durchschnittskostenfunktion 20
 variable Kostenfunktion 20
 variable Stückkostenfunktion 20
 Varianz 15, 16
 Vektoren 8
 Vektorprodukt 9
 Vereinigung(smenge) 3
 Verflechtungsmatrix 10
 Verteilungsfunktion 17
 Verzinsung 18
 Viereck 5
 Volumen 6, 14
 vorschüssig 19
 Vorsilben 3

W

Wahrscheinlichkeit 16, 17
 Weg-Zeit-Funktion 20
 Wiederveranlagungszinssatz 19
 Winkel 7
 Würfel 6
 Wurzeln 3

Z

Zahlenmengen 3
 Zenti- 3
 Zinsanteil 19
 Zinsen 18
 Zinseszinsen 18
 Zinssatz 19
 Zufallsstrebereich 17
 Zufallsvariable 16, 17

σ -Umgebungen 17

Index

A

Abklingfunktion 13
 Ableitung 13
 Ableitungsfunktion 13
 Ableitungsregeln 13
 absolute Änderung 11
 absolute Häufigkeit 15
 Ähnlichkeit 5
 allgemeine Geradengleichung 9
 allgemeines Dreieck 5, 7
 Amplitude 7
 Änderungsfaktor 12
 Änderungsmaße 11
 Änderungsrate 11
 Anfangskapital 18
 Annuität 19
 Anschaffungskosten 19
 äquivalente Zinssätze 18
 arithmetische Folge 11
 arithmetisches Mittel 15
 arithmetische Reihe 11
 Aufzinsungsfaktor 19

B

Barwert 19
 bedingte Wahrscheinlichkeit 16
 Beschleunigung-Zeit-Funktion 20
 beschränkte Abnahme 12
 beschränktes Wachstum 12
 bestimmtes Integral 13
 Betriebsminimum 20
 Betriebsoptimum 20
 Bewegungsvorgänge 20
 Binomialkoeffizient 16
 Binomialverteilung 16
 binomische Formeln 4
 Bogenlänge 14
 Bogenmaß 7
 Break-even-Point 20

C

Cosinus 7
 Cosinussatz 7
 Cournot'scher Punkt 20

D

degressiver Kostenverlauf 20
 Deka- 3
 dekadischer Logarithmus 4
 Deltoid 6
 Dezi- 3
 Dichtefunktion 17
 Differenzenquotient 11
 Differenzialgleichungen 14
 Differenzialquotient 11
 Differenzmenge 3
 diskrete Zufallsvariable 16
 Drehkegel 6

Drehzylinder 6
 Dreieck 5
 Durchschnitt(smenge) 3
 Durchschnittskostenfunktion 20

E

ebene Figuren 5
 echte Teilmenge 3
 effektiver Jahreszinssatz 18
 einfache Verzinsung 18
 Einheitskreis 7
 Einheitsmatrix 10
 Einheitsvektor 9
 Element 3
 Endkapital 18
 Endwert 19
 Erlösfunktion 20
 Erwartungswert 16, 17
 explizites Bildungsgesetz 11
 exponentielle Abnahme 12
 exponentielles Wachstum 12

F

Faktorielle 16
 Faktorregel 13
 Fakultät 16
 Finanzmathematik 18
 Fixkosten 20
 Flächeninhalt 5
 Folgen 11
 Freiheitsgrad 17
 Frequenz 7

G

ganze Zahlen 3
 Gegenereignis 16
 geometrische Folge 11
 geometrische Reihe 11
 geometrisches Mittel 15
 Gerade 9
 Geradengleichung 9
 Geschwindigkeit-Zeit-Funktion 20
 Gewinnbereich 20
 Gewinnfunktion 20
 Gewinngrenze 20
 Gewinnschwelle 20
 Gewinnzone 20
 Giga- 3
 gleichseitiges Dreieck 5
 Gradmaß 7
 Grenzerlösfunktion 20
 Grenzgewinnfunktion 20
 Grenzkostenfunktion 20
 Grundfläche 6

H

Hekto- 3
 Heron'sche Flächenformel 5

Höchstpreis 20
 homogene Differenzialgleichung 14
 Hypotenuse 5

I

Imaginärteil 8
 inhomogene Differenzialgleichung 14
 Integral 13
 interner Zinssatz 19
 Interquartilsabstand 15
 inverse Matrix 10
 Investitionsrechnung 19

J

Jahreszinssatz 18

K

kalkulatorischer Zinssatz 19
 Kapazitätsgrenze 12
 Kapitalwert 19
 Kathete 5
 Kettenregel 13
 Kilo- 3
 komplexe Zahlen 8
 Komponentenform 8
 Konfidenzintervall 17
 Körper 6
 Korrelationskoeffizient 18
 Kosten- und Preistheorie 20
 kostendeckender Preis 20
 Kostenfunktion 20
 Kostenkehre 20
 Kreis 6
 Kreisbogen 6
 Kreisfrequenz 7
 Kreissektor 6
 Kugel 6
 kurzfristige Preisuntergrenze 20

L

Lagemaße 15
 langfristige Preisuntergrenze 20
 Laplace-Versuch 16
 leere Menge 3
 lineare Abnahme 12
 lineare Gleichungssysteme 10
 lineare Regression 18
 lineare Substitution 14
 linearer Mittelwert 14
 lineares Wachstum 12
 Linearfaktoren 4
 Logarithmen 4
 logistisches Wachstum 12
 lokale Änderungsrate 11

Inhaltsverzeichnis

Kapitel	Seite
1 Mengen	3
2 Vorsilben	3
3 Potenzen	3
4 Logarithmen	4
5 Quadratische Gleichungen	4
6 Ebene Figuren	5
7 Körper	6
8 Trigonometrie	7
9 Komplexe Zahlen	8
10 Vektoren	8
11 Geraden	9
12 Matrizen	10
13 Folgen und Reihen	11
14 Änderungsmaße	11
15 Wachstums- und Abnahmeprozesse	12
16 Ableitung und Integral	13
17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	14
18 Statistik	15
19 Wahrscheinlichkeit	16
20 Lineare Regression	18
21 Finanzmathematik	18
22 Investitionsrechnung	19
23 Kosten- und Preistheorie	20
24 Bewegungsvorgänge	20
Index	21

1 Mengen

\in	ist Element von ...
\notin	ist nicht Element von ...
\cap	Durchschnitt(smenge)
\cup	Vereinigung(smenge)
\subset	echte Teilmenge
\subseteq	Teilmenge
\setminus	Differenzmenge („ohne“)
$\{ \}$	leere Menge

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	natürliche Zahlen
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{Q}	rationale Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
\mathbb{R}^+	positive reelle Zahlen
\mathbb{R}_0^+	positive reelle Zahlen mit Null

2 Vorsilben

Tera-	T	10^{12}	Dezi-	d	10^{-1}
Giga-	G	10^9	Zenti-	c	10^{-2}
Mega-	M	10^6	Milli-	m	10^{-3}
Kilo-	k	10^3	Mikro-	μ	10^{-6}
Hekto-	h	10^2	Nano-	n	10^{-9}
Deka-	da	10^1	Pico-	p	10^{-12}

3 Potenzen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$	$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
		$a^{-1} = \frac{1}{a}$
		$a^0 = 1$

Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

$a, b \in \mathbb{R}_0^+; n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \geq 2$			
$a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$	$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ mit $a > 0$

23 Kosten- und Preistheorie

x ... produzierte, angebotene, nachgefragte bzw. verkaufte Menge ($x \geq 0$)

Kostenfunktion K	$K(x)$
Fixkosten F	$K(0)$
variable Kostenfunktion K_v	$K_v(x) = K(x) - F$
Grenzkostenfunktion K'	$K'(x)$
Stückkostenfunktion (Durchschnittskostenfunktion) \bar{K}	$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$
variable Stückkostenfunktion (variable Durchschnittskostenfunktion) \bar{K}_v	$\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Betriebsoptimum x_{opt}	$\bar{K}'(x_{opt}) = 0$ (Minimumstelle von \bar{K})
langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis)	$\bar{K}(x_{opt})$
Betriebsminimum x_{min}	$\bar{K}_v'(x_{min}) = 0$ (Minimumstelle von \bar{K}_v)
kurzfristige Preisuntergrenze	$\bar{K}_v(x_{min})$
Kostenkehre	$K'''(x) = 0$
progressiver Kostenverlauf	$K'''(x) > 0$
degressiver Kostenverlauf	$K'''(x) < 0$

Preis p

Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion) p_N	$p_N(x)$
Preisfunktion des Angebots p_A	$p_A(x)$
Marktgleichgewicht	$p_A(x) = p_N(x)$
Höchstpreis	$p_N(0)$
Sättigungsmenge	$p_N(x) = 0$

Erlösfunktion (Umsatzfunktion) E	$E(x) = p \cdot x$ bzw. $E(x) = p_N(x) \cdot x$
Grenzerlösfunktion E'	$E'(x)$
Gewinnfunktion G	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion G'	$G'(x)$
untere Gewinngrenze (Break-even-Point, Gewinnschwelle) x_u	$G(x_u) = G(x_0) = 0$ mit $x_u \leq x_0$
obere Gewinngrenze x_0	
Gewinnbereich (Gewinnzone)	$[x_u; x_0]$
Cournot'scher Punkt C	$C = (x_c p_N(x_c))$ mit $G'(x_c) = 0$

24 Bewegungsvorgänge

t ... Zeit

Weg-Zeit-Funktion s	$s(t)$
Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v	$v(t) = s'(t)$
Beschleunigung-Zeit-Funktion a	$a(t) = v'(t) = s''(t)$

Rentenrechnung

R ... Ratenhöhe
 n ... Anzahl der Raten
 i ... Zinssatz
 $q = 1 + i$... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert E	$E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert B	$B_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

Tilgungsplan

Zeit	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				K_0
1	$K_0 \cdot i$	T_1	$A_1 = K_0 \cdot i + T_1$	$K_1 = K_0 - T_1$
...

22 Investitionsrechnung

E_t ... Einnahmen im Jahr t
 A_t ... Ausgaben im Jahr t
 A_0 ... Anschaffungskosten
 R_t ... Rückflüsse im Jahr t
 i ... kalkulatorischer Zinssatz (Jahreszinssatz)
 n ... Nutzungsdauer in Jahren
 i_w ... Wiederveranlagungszinssatz (Jahreszinssatz)
 E ... Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse

$$R_t = E_t - A_t$$

Kapitalwert C_0

$$C_0 = \left[\frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} \right] - A_0$$

Interner Zinssatz i_{intern}

$$\left[\frac{R_1}{(1+i_{\text{intern}})} + \frac{R_2}{(1+i_{\text{intern}})^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i_{\text{intern}})^n} \right] - A_0 = 0$$

Modifizierter interner Zinssatz i_{mod}

$$A_0 \cdot (1 + i_{\text{mod}})^n = E \quad \text{mit} \quad E = R_1 \cdot (1 + i_w)^{n-1} + R_2 \cdot (1 + i_w)^{n-2} + \dots + R_{n-1} \cdot (1 + i_w) + R_n$$

Rechenregeln

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; r, s \in \mathbb{Z}$
 bzw. $a, b \in \mathbb{R}^+; r, s \in \mathbb{Q}$

$a, b \in \mathbb{R}_0^+; m, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $m, n \geq 2$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^n)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Binomische Formeln

$a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

$$(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$$

4 Logarithmen

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1; x, r \in \mathbb{R}$

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e): $\ln(b) = \log_e(b)$

dekadischer Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10): $\lg(b) = \log_{10}(b)$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \log_a(a) = 1 \quad \log_a(1) = 0 \quad \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1 \quad a^{\log_a(b)} = b$$

5 Quadratische Gleichungen

$p, q \in \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Zerlegung in Linearfaktoren:

$$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

6 Ebene Figuren

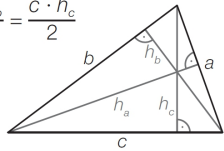
A ... Flächeninhalt
u ... Umfang

Dreieck

$$u = a + b + c$$

Allgemeines Dreieck

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

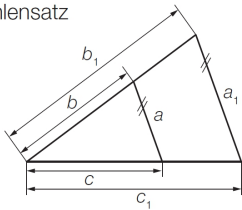


Heron'sche Flächenformel

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \text{ mit } s = \frac{a+b+c}{2}$$

Ähnlichkeit und Strahlensatz

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

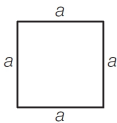


Viereck

Quadrat

$$A = a^2$$

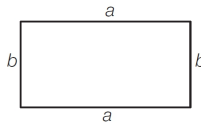
$$u = 4 \cdot a$$



Rechteck

$$A = a \cdot b$$

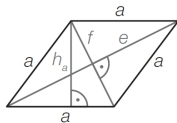
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Raute (Rhombus)

$$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

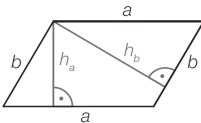
$$u = 4 \cdot a$$



Parallelogramm

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Rechtwinkeliges Dreieck

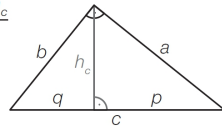
mit Hypotenuse c und Katheten a, b

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$h_c^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$



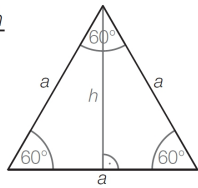
Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$



20 Lineare Regression

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \dots$ Wertepaare
 $\bar{x}, \bar{y} \dots$ arithmetisches Mittel der x_i bzw. y_i

Lineare Regressionsfunktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$d = \bar{y} - k \cdot \bar{x}$$

Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

21 Finanzmathematik

Zinsen und Zinseszinsen

$K_0 \dots$ Anfangskapital

$K_n \dots$ Endkapital nach n Jahren

$i \dots$ Jahreszinssatz

einfache Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

Zinseszinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Unterjährige Verzinsung

$m \dots$ Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

Für Zinssätze gelten folgende Abkürzungen:

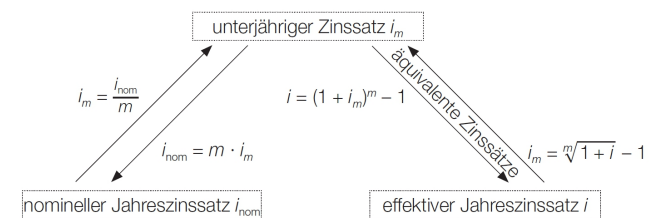
p. a. ... pro Jahr

p. s. ... pro Semester

p. q. ... pro Quartal

p. m. ... pro Monat

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$$



Normalverteilung

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$
 f ... Dichtefunktion
 F ... Verteilungsfunktion
 φ ... Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
 Φ ... Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Normalverteilung $N(\mu; \sigma^2)$: Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ bzw. der Varianz σ^2

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Wahrscheinlichkeiten für σ -Umgebungen

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0,954$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0,997$$

Standardnormalverteilung $N(0; 1)$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 2 \cdot \phi(z) - 1$$

$P(-z \leq Z \leq z)$	= 90 %	= 95 %	= 99 %
z	≈ 1,645	≈ 1,960	≈ 2,576

Zufallsstreuung und Konfidenzintervall

$\mu, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ und $0 < \alpha < 1$
 \bar{x} ... Stichprobenmittelwert
 s_{n-1} ... Standardabweichung einer Stichprobe
 n ... Stichprobenumfang
 $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$... $(1-\frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung
 $t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$... $(1-\frac{\alpha}{2})$ -Quantil der t -Verteilung mit f Freiheitsgraden

Zweiseitiger $(1-\alpha)$ -Zufallsstreuung für einen Einzelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right]$$

Zweiseitiger $(1-\alpha)$ -Zufallsstreuung für den Stichprobenmittelwert normalverteilter Werte

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Zweiseitiges $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

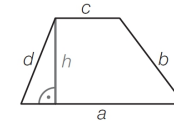
$$\sigma \text{ bekannt: } \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\sigma \text{ unbekannt: } \left[\bar{x} - t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] \text{ mit } f = n - 1$$

Trapez

$$A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$

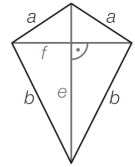
$$u = a + b + c + d$$



Deltoid

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

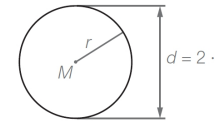
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Kreis

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

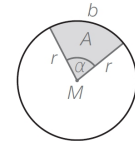


Kreisbogen und Kreissektor

α im Gradmaß ($^\circ$)

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$$



7 Körper

V ... Volumen

O ... Inhalt der Oberfläche

G ... Inhalt der Grundfläche

M ... Inhalt der Mantelfläche

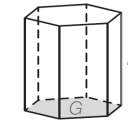
u_G ... Umfang der Grundfläche

Prisma

$$V = G \cdot h$$

$$M = u_G \cdot h$$

$$O = 2 \cdot G + M$$

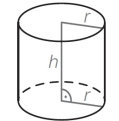


Drehzylinder

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

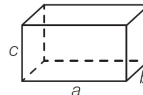
$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Quader

$$V = a \cdot b \cdot c$$

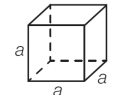
$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$



Würfel

$$V = a^3$$

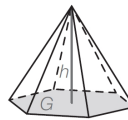
$$O = 6 \cdot a^2$$



Pyramide

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$O = G + M$$



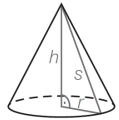
Drehkegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$



Kugel

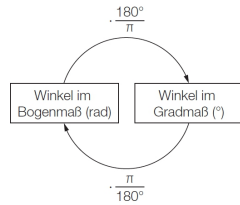
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$



8 Trigonometrie

Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß

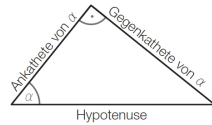


Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

$$\text{Sinus: } \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Cosinus: } \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

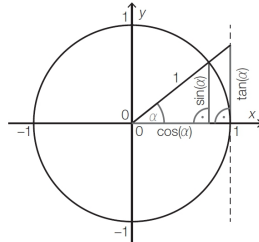
$$\text{Tangens: } \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$



Trigonometrie im Einheitskreis

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \text{ für } \cos(\alpha) \neq 0$$



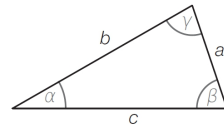
Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\text{Cosinussatz: } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$



Trigonometrische Flächenformel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$

Allgemeine Sinusfunktion

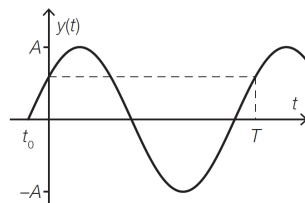
A ... Amplitude
 ω ... Kreisfrequenz
 φ ... Nullphasenwinkel

T ... Schwingungsdauer (Periodendauer)
 f ... Frequenz

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

$$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$



19 Wahrscheinlichkeit

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n$$

A, B ... Ereignisse

\bar{A} bzw. $\neg A$... Gegenereignis von A

$A \cap B$ bzw. $A \wedge B$... A und B (sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B treten ein)

$A \cup B$ bzw. $A \vee B$... A oder B (mindestens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein)

$P(A)$... Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A

$P(A|B)$... Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass B eingetreten ist (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Fakultät (Faktorielle)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Versuch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Elementare Regeln

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$... wenn A und B (stochastisch) unabhängig voneinander sind

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$... wenn A und B unvereinbar sind

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$$

Erwartungswert μ einer diskreten Zufallsvariablen X

mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz σ^2 einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Binomialverteilung

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{R} \text{ mit } k \leq n \text{ und } 0 \leq p \leq 1$$

Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

$$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

18 Statistik

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ eine Liste von n reellen Zahlen
 Dabei treten k verschiedene Werte x_1, x_2, \dots, x_k auf.
 H_i ... absolute Häufigkeit von x_i mit $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$

Relative Häufigkeit von x_i

$$h_i = \frac{H_i}{n}$$

Lagemaße

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \dots + x_k \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot H_i$$

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_{\text{geo}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \text{ mit } x_i > 0$$

Median bei metrischen Daten

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$... geordnete Liste mit n Werten

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \dots \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \dots \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Quartile

q_1 : Mindestens 25 % der Werte sind kleiner oder gleich q_1 , zugleich sind mindestens 75 % der Werte größer oder gleich q_1 .

$q_2 = \bar{x}$

q_3 : Mindestens 75 % der Werte sind kleiner oder gleich q_3 , zugleich sind mindestens 25 % der Werte größer oder gleich q_3 .

Streuungsmaße

s^2 ... (empirische) Varianz einer Datenliste

s ... (empirische) Standardabweichung einer Datenliste

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

Wenn aus einer Stichprobe vom Umfang n die Varianz einer Grundgesamtheit geschätzt werden soll

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

Spannweite

$$x_{\max} - x_{\min}$$

(Inter)quartilsabstand

$$q_3 - q_1$$

9 Komplexe Zahlen

j bzw. i ... imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$ bzw. $i^2 = -1$

a ... Realteil, $a \in \mathbb{R}$

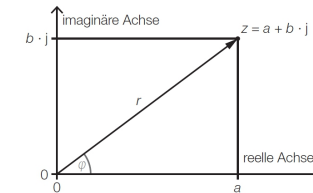
b ... Imaginärteil, $b \in \mathbb{R}$

r ... Betrag, $r \in \mathbb{R}^+$

φ ... Argument, $\varphi \in \mathbb{R}$

Komponentenform

$$z = a + b \cdot j$$



Polarformen

$$z = r \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{j \cdot \varphi} = (r; \varphi) = r \angle \varphi$$

Umrechnungen

$$a = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

10 Vektoren

P, Q ... Punkte

Vektoren in \mathbb{R}^2

Pfeil von P nach Q :

$$P = (p_1 | p_2), Q = (q_1 | q_2)$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in \mathbb{R}^2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in \mathbb{R}^2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Betrag (Länge) eines Vektors in \mathbb{R}^2

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Normalvektoren zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^2

$$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } |\vec{a}| \neq 0$$

Vektoren in \mathbb{R}^n

Pfeil von P nach Q :

$$P = (p_1 | p_2 | \dots | p_n), Q = (q_1 | q_2 | \dots | q_n)$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Betrag (Länge) eines Vektors in \mathbb{R}^n

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Winkel φ zwischen \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 mit $|\vec{a}| \neq 0$; $|\vec{b}| \neq 0$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Einheitsvektor \vec{a}_0 in Richtung \vec{a}

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \text{ mit } |\vec{a}| \neq 0$$

Vektorprodukt in \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

11 Geraden

g ... Gerade	\vec{g} ... ein Richtungsvektor der Geraden g
	\vec{n} ... ein Normalvektor der Geraden g
	X, P ... Punkte auf der Geraden g
	k ... Steigung der Geraden g
	α ... Steigungswinkel der Geraden g
	$a, b, c, k, d \in \mathbb{R}$

Parameterdarstellung einer Geraden g in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$g: X = P + t \cdot \vec{g} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Gleichung einer Geraden g in \mathbb{R}^2

explizite Form der Geradengleichung:	$g: y = k \cdot x + d$	dabei gilt $k = \tan(\alpha)$
allgemeine Geradengleichung:	$g: a \cdot x + b \cdot y = c$	dabei gilt $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Normalvektordarstellung:	$g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$	

Integrationsmethode – lineare Substitution

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

Volumen von Rotationskörpern

Rotation des Graphen einer Funktion f mit $y = f(x)$ um eine Koordinatenachse

Rotation um die x-Achse ($a \leq x \leq b$)

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

Rotation um die y-Achse ($c \leq y \leq d$)

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$$

Bogenlänge s des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Linearer Mittelwert m einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ bzw. } \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \text{ mit } y = y(x)$$

Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y ... allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung
y_h ... allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + a \cdot y = 0$
y_p ... partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung
s ... Störfunktion

$$y' + a \cdot y = s(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}, y = y(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

16 Ableitung und Integral

$f, g, h \dots$ auf ganz \mathbb{R} oder in einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen
 $f', g', h' \dots$ Ableitungsfunktionen
 $F \dots$ Stammfunktion von f
 $C, k, q \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ mit } F' = f$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Funktion f	Ableitungsfunktion f'	Stammfunktion F
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(x)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\cos(x))$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

12 Matrizen

$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}; i, j, m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{R}$

Addition/Subtraktion von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl k

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

$A \dots m \times p$ -Matrix $B \dots p \times n$ -Matrix $C = A \cdot B \dots m \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Einheitsmatrix E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix A^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix A^{-1} einer quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise (n Gleichungen in n Variablen)

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Wenn die inverse Matrix A^{-1} existiert, dann gilt: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Produktionsprozesse

$A \dots$ quadratische Verflechtungsmatrix $E \dots$ Einheitsmatrix
 $\vec{x} \dots$ Produktionsvektor $\vec{n} \dots$ Nachfragevektor

$$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = (E - A) \cdot \vec{x}$$

13 Folgen und Reihen

Arithmetische Folge

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Explizites Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Endliche arithmetische Reihe

Summe der ersten n Glieder

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$

Geometrische Folge

$$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Explizites Bildungsgesetz

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Endliche geometrische Reihe

Summe der ersten n Glieder

$$s_n = \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } q \neq 1$$

Unendliche geometrische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist genau dann konvergent,
wenn $|q| < 1$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{b_1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

14 Änderungsmaße

Für eine auf einem Intervall $[a; b]$ definierte reelle Funktion f gilt:

Absolute Änderung von f in $[a; b]$

$$f(b) - f(a)$$

Relative (prozentuale) Änderung von f in $[a; b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \quad \text{mit } f(a) \neq 0$$

Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) von f in $[a; b]$ bzw. in $[x; x + \Delta x]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{mit } b \neq a \quad \text{bzw.} \quad \Delta x \neq 0$$

Differenzialquotient (lokale bzw. „momentane“ Änderungsrate) von f an der Stelle x

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

15 Wachstums- und Abnahmeprozesse

t ... Zeit

$N(t)$... Bestand zur Zeit t

$N_0 = N(0)$... Bestand zur Zeit $t = 0$

Linear

$$k \in \mathbb{R}^+$$

lineares Wachstum $N(t) = N_0 + k \cdot t$

lineare Abnahme $N(t) = N_0 - k \cdot t$

Exponentiell

$a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$ und $N_0 > 0$

a ... Änderungsfaktor

exponentielles Wachstum $N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $a > 1$ $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

exponentielle Abnahme $N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $0 < a < 1$ $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Beschränkt

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$

S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

beschränktes Wachstum (Sättigungsfunktion) $N(t) = S - b \cdot a^t$ mit $b = S - N_0$ $N(t) = S - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = S - N_0$

beschränkte Abnahme (Abklingfunktion) $N(t) = S + b \cdot a^t$ mit $b = |S - N_0|$ $N(t) = S + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = |S - N_0|$

Logistisch

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$ und $N_0 > 0$

S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

logistisches Wachstum $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot a^t}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$ $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$